TABELLEN VOOR DE STRALINGSFORMULE VAN PLANCK

door W. DE GROOT

Summary.

This paper contains the construction of a table for Planck's radiation formula.

Direction for use:

From table 2 take the numbers $a\lambda$ and a_T corresponding to the given values of λ and T (the same column contains both λ- and T-values in Å and °K respectively). Add these two numbers together

$$a\lambda + a_T = \log x.$$

Then from table 1 take the value of $q(x)$ corresponding to the $\log x$ just found. The monochromatic radiation from 1 cm² of the radiating surface per steradian perpendicular to the surface of the radiator within a wavelength range of 1 Å, is given in erg/sec by

$$A \cdot T^5 \cdot q(x).$$

The value of AT^5 is also to be found in table 2. The value of c_2 used is 1,4325 cm. °K and that of c_1 3,703/$\pi 10^{-5}$ erg cm² sec^{-1}.

De stralingsformule van Planck vindt uitgebreide toepassing in photometrie, optische pyrometrie, en in het algemeen bij intensiteitsmetingen in het spectrum, zoowel in het zichtbare deel daarvan als daarbuiten.

De genoemde toepassingen doen de behoefte gevoelen aan tabellen waarin de waarde van de functie van Planck in afhankelijkheid van temperatuur en golflengte kan worden gevonden.

Een dergelijke tabel behoort zoodanig te zijn, dat men voor golflengten en temperaturen die niet in de tabel voorkomen, gemakkelijk kan interpoleeren. Aan deze voorwaarde voldoen de tabellen die tot heden werden aangeboden veelal niet in die mate waarin men dit redelijkerwijs mag wenschen. In de International Critical Tables b.v. vindt men in het gebied 1000—4000 Å de

W. de Groot "Tabellen voor de stralingsformule van Planck," Physica. Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde, Vol. 11, No 8, pp. 265-274 (1931)

golflengte opklimmende met 1000 Å, terwijl de temperatuur b.v. springt van 3000° op 4000° zonder tusschenwaarde. Hieronder wordt een tabel geboden die zoodanig is ingericht dat iedere volgende golflengte slechts 2,3% van de vorige verschilt, terwijl hetzelfde geldt voor de temperaturen.

(b.v. $\Delta\lambda = 23\ Å$ bij $1000\ Å$ $\qquad$ $115\ Å$ bij $5000\ Å$
ΔT $\quad 23°K$ „ $1000°K$ $\qquad$ $69°K$ „ $3000°K$).

De stralingsformule van Planck

$$E(\lambda, T)\, d\lambda = c_1 \lambda^{-5}/(e^{c_2/\lambda T} - 1)\, d\lambda$$

kan hiertoe, in overeenstemming met de verschuivingswet van Wien gebracht worden in den vorm:

$$E = BT^5\, y^5/(e^y - 1)$$

waarin

$$B = c_1 c_2^{-5} \qquad y = c_2/\lambda T.$$

Een tabel van de functie van Planck kan dus, voor zoover het relatieve waarden betreft uit een enkele kolom bestaan [1]).

De berekening dezer tabel moge met enkele woorden worden toegelicht:

De formule is geschikt gemaakt voor Briggiaansche logarithmen:

$$E = A\,.\,T^5 x^5/(10^x - 1)$$

waarin

$$A = c_1\,(c_2 M)^{-5} \qquad x = Mc_2/\lambda T$$

$c_2 = 1{,}4325\ 10^8$ $\quad$ wanneer λ in Å, $d\lambda$ in Å
T in °K

$$M = \log e = 0{,}4343$$

$c_1 = 1{,}18\ 10^{-20(1)}$ watt Å^4/cm^2 $= 1{,}18\ 10^{-13(1)}$ erg Å^4/cm^2 sec

1) Nieuw is dit idee niet. Zoo geeft C. Fabry in zijn „Introduction Générale à la Photométrie" (Ed. Revue d'Optique 1927, page 121)

$$r = I(\lambda, T) = \pi E(\lambda, T) = r_{max}\,.\,y(x)$$

in den vorm eener tabel voor 213 verschillende waarden van $x = \lambda/\lambda_{max}$ tusschen 0,1 en 50 (overeenkomende met onze $\log x$ tusschen — 1,37 en 1,33), waarbij aangegeven is, dat

$$r_{max} = 1{,}301\ (T/1000)^5.$$

Ook het „Bureau of Standards (Miscell. publication No. 56, Sh. 7) geeft een tabel voor E/E_{max} als functie van λT voor 158 waarden van λT (μ . °K) tusschen 400 en 20500 (overeenkomende met onze $\log x$ tusschen — 0,5 en 1,21).

c_1 is zoo gekozen dat de formule de straling geeft van 1 cm² normaal op het stralende oppervlak per eenheid van openingshoek in een golflengtegebied van 1 Å breedte. Men begint met een kolom $log\, x$ in te richten, opklimmende met 0,01 (vandaar de 2,3%; $log\, 1{,}023 = 0{,}01$). Daarnaast komt de x-kolom; voor het interval $0 < log\, x < 1{,}1 < lg\, x < 2$ enz. en eveneens voor $-1 < lg\, x < 0$ herhalen zich de x-waarden op een factor 10 na. In het interval $0 < lg\, x < 1$ moet x in 5 decimalen worden opgezocht, wil men later tot het eind der tabel ($lg\, x = 1{,}2$) ½% nauwkeurigheid bereiken.

Uit de waarden van x vindt men direct $log\, (10^x - 1)$ door gebruik te maken van een tabel van logarithmen van Gauss en daaruit

$$-lg\, \varphi\, (x) \text{ en } lg\, \varphi\, (x)$$

waarin

$$\varphi\, (x) = x^5/(10^x - 1).$$

Hierbij doet zich nog de vereenvoudiging voor, dat voor

$$x > 3$$

$log\, (10^x - 1)$ practisch $= x$, in overeenstemming met de stralingsformule van Wien terwijl voor kleine x-waarden, n.l.

$$x < 0{,}1$$

$$10^x - 1 = e^{x/M} - 1 = 1 + x/M + x^2/2M^2 \ldots\ldots - 1$$
$$= (x/M)\, [1 + (x/2M)]$$

zoodat:

$$log\, (10^x - 1) = -log\, M + log\, x + x/2$$
$$-log\, \varphi\, (x) = -log\, M - 4\, log\, x + x/2$$

in overeenstemming met de stralingsformule van Rayleigh wanneer $x/2$ te verwaarloozen is.

Behalve deze tabel heeft men nog een tweede noodig waaruit bij iedere combinatie λ, T de waarde van x kan worden gevonden. Deze tabel kan nu als volgt worden ingericht. Men begint te zoeken die waarde waarvoor $\lambda = T$ en tevens

$$log\, x = log\, M + log\, c_2 - log\, \lambda - log\, T = 0.$$

Deze waarde is 7887 $\AA$ resp. $^\circ K$. Wanneer men nu daaronder de getallen laat volgen waarvan de logarithme is

$$log\ 7887 - a$$

(a opklimmende met 0,01), dan is

$$log\ x = a_\lambda + a_T$$

waarin a_λ en a_T voorstellen de waarden van a behoorende bij de waarden van λ en T van de combinatie voor welke men $log\ x$ wenschte te kennen.

Achter ieder getal van deze kolom, als temperatuur opgevat, kan men dan nog de waarde van AT^5 laten volgen. Daar de logarithmen van T met 0,01 opklimmen zullen de waarden van $log\ AT^5$ zich 5 maal herhalen in het interval $0 < a < 1$. Dit interval is zoowel voor golflengte (800—8000 $\AA$) als temperatuur (800—8000$^\circ K$) het meest voorkomende. Uitbreiding van het interval komt neer op vermeerdering van a met een geheel getal en het bijvoegen van factoren 10 bij de waarde van AT^5. Met deze twee tabellen kan men nu snel een aantal waarden van de stralingsfunctie construeeren in een gewenscht golflengtegebied voor 2 temperaturen rondom de gegeven temperatuur, waaruit door niet te grove interpolatie de gewenschte waarden kunnen worden afgeleid.

Aan een enkel voorbeeld moge het gebruik der tabellen worden toegelicht. Gevraagd worden de straling van een gloeiend wolfraamoppervlak van $2 \times 0{,}2$ cm^2 (wolfraambandlamp) per eenheid van openingshoek loodrecht op dit oppervlak, in het golflengtegebied 2750—3000 $\AA$ wanneer de temperatuur van het wolfraamband 2999$^\circ K$ bedraagt.

Wij vinden:

λ =	3069	2999	2930	2864	2799	2735 $\AA$
a_λ =	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46
a_T =	0,42					
$log\ x$ =	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88

Dit levert direct de relatieve energiewaarden

24,5	19,1	14,8	11,4	8,65	6,52

terwijl de absolute waarden verkregen worden door vermenigvuldiging met

$$10^{-4} \times 3{,}08 \times 10^{5} = 30{,}8.$$

Deze waarden zijn dan nog te vermenigvuldigen met het oppervlak 0,4 en met het emissievermogen van wolfraam, dat in het genoemde golflengtegebied volgens Spiller[1]) 0,71 bedraagt ten slotte vindt men, graphisch integreerende, voor de totale straling in dit gebied:

$$3110 \times 30{,}8 \times 0{,}40 \times 0{,}71 = 2{,}7\ 10^{4}\ \mathrm{erg/sec}$$
$$= 2{,}7\ 10^{-3}\ \mathrm{watt}.$$

Een contrôle op de juistheid van de tabel werd gemaakt door te berekenen de hemispherische straling per cm^2 per sec in het maximum der verdeelingsfunctie. Voor dit maximum bedraagt $q = 3{,}27\ 10^{-4}$.

Wij vinden:

T	E (erg/Å)	$I.C.T.$
1000	$1{,}295\ 10^{3}$	$1{,}29\ 10^{3}$
2000	$4{,}15\ 10^{4}$	$4{,}15\ 10^{4}$
3000	$3{,}15\ 10^{5}$	$3{,}15\ 10^{5}$

De heer J. Riemens was behulpzaam bij de berekening en correctie der tabellen.

1) Zs. f. Phys. **64**, 42, 1930.

Eindhoven, 7 Maart 1931. Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken.

TABEL 1.

log x	*log* Φ	Φ (x)	*log x*	*log* φ	Φ (x)
$\bar{2}$,00	$\bar{9}$,632	4,29 10^{-9}	$\bar{2}$,40	$\bar{7}$,226	1,68 10^{-7}
,01	,672	4,70	,41	,266	1,85
,02	,712	5,15	,42	,306	2,02
,03	,752	5,65	,43	,346	2,22
,04	,792	6,19	,44	,385	2,43
,05	,832	6,79	,45	,425	2,66
,06	,872	7,45	,46	,465	2,92
,07	,912	8,17	,47	,504	3,19
,08	,952	8,95	,48	,544	3,50
,09	,992	9,82	,49	,584	3,84
,10	$\bar{8}$,031	1,07 10^{-8}	,50	,623	4,20
,11	,071	1,18	,51	,663	4,60
,12	,111	1,29	,52	,703	5,05
,13	,151	1,42	,53	,742	5,52
,14	,191	1,55	,54	,782	6,05
,15	,231	1,70	,55	,821	6,62
,16	,271	1,87	,56	,861	7,26
,17	,311	2,05	,57	,900	7,94
,18	,351	2,24	,58	,940	8,71
,19	,391	2,46	,59	,979	9,53
,20	,431	2,70	,60	$\bar{6}$,019	1,04 10^{-6}
,21	,471	2,96	,61	,058	1,14
,22	,511	3,24	,62	,097	1,25
,23	,550	3,55	,63	,137	1,37
,24	,590	3,89	,64	,176	1,50
,25	,630	4,27	,65	,216	1,64
,26	,670	4,68	,66	,255	1,80
,27	,710	5,13	,67	,295	1,97
,28	,749	5,61	,68	,334	2,16
,29	,789	6,15	,69	,373	2,36
,30	,829	6,75	,70	,413	2,59
31	,869	7,40	,71	,452	2,83
,32	,909	8,11	,72	,492	3,10
,33	,948	8,87	,73	,531	3,40
,34	,988	9,73	,74	,571	3,72
,35	$\bar{7}$,028	1,07 10^{-7}	,75	,610	4,07
,36	,068	1,17	,76	,649	4,46
,37	,107	1,28	,77	,688	4,88
,38	,147	1,40	,78	,728	5,35
,39	,187	1,54	,79	,767	5,85

TABEL 1.

log x	*log Φ*	Φ (*x*)	*log x*	*log Φ*	Φ (*x*)
$\bar{2}$,80	$\bar{6}$,806	6,40 10^{-6}	$\bar{1}$,20	$\bar{4}$,356	2,27 10^{-4}
,81	,845	7,00	,21	,394	2,48
,82	,885	7,67	,22	,432	2,70
,83	,924	8,39	,23	,469	2,94
,84	,963	9,18	,24	,507	3,21
,85	$\bar{5}$,002	1,00 10^{-5}	,25	,545	3,51
,86	,041	1,10	,26	,582	3,82
,87	,080	1,20	,27	,620	4,17
,88	,119	1,32	,28	,658	4,55
,89	,158	1,44	,29	,696	4,97
,90	,197	1,57	,30	,734	5,42
,91	,236	1,72	,31	,771	5,90
,92	,275	1,88	,32	,808	6,43
,93	,314	2,06	,33	,846	7,01
,94	,353	2,25	,34	,883	7,64
,95	,392	2,47	,35	,920	8,32
,96	,431	2,70	,36	,958	9,08
,97	,470	2,95	,37	,995	9,89
,98	,509	3,23	,38	$\bar{3}$,032	1,08 10^{-3}
,99	,548	3,53	,39	,069	1,17
$\bar{1}$,00	,587	3,86	,40	,106	1,28
,01	,626	4,23	,41	,143	1,39
,02	,665	4,62	,42	,180	1,51
,03	,703	5,05	,43	,217	1,65
,04	,742	5,52	,44	,253	1,79
,05	,780	6,03	,45	,289	1,95
,06	,819	6,59	,46	,325	2,11
,07	,857	7,19	,47	,361	2,30
,08	,896	7,87	,48	,397	2,49
,09	,935	8,61	,49	,433	2,71
,10	,973	9,40	,50	,469	2,94
,11	$\bar{4}$,012	1,03 10^{-4}	,51	,505	3,20
,12	,050	1,12	,52	,541	3,48
,13	,088	1,22	,53	,577	3,78
,14	,127	1,34	,54	,613	4,10
,15	,165	1,46	,55	,648	4,45
,16	,203	1,60	,56	,683	4,82
,17	,242	1,75	,57	,718	5,22
,18	,280	1,91	,58	,753	5,66
,19	,318	2,08	,59	,788	6,14

TABEL 1.

log x	*log* Φ	Φ (x)	*log x*	*log* Φ	Φ (x)
$\bar{1}$,60	$\bar{3}$,822	6,64 10^{-3}	0,00	$\bar{1}$,046	1,11 10^{-1}
,61	,857	7,19	,01	,070	1,17
,62	,895	7,85	,02	,094	1,24
,63	,929	8,49	,03	,117	1,31
,64	,963	9,18	,04	,140	1,38
,65	,997	9,93	,05	,162	1,45
,66	$\bar{2}$,031	1,07 10^{-2}	,06	,184	1,53
,67	,064	1,16	,07	,205	1,60
,68	,097	1,25	,08	,226	1,68
,69	,130	1,35	,09	,246	1,76
,70	,163	1,46	,10	,265	1,84
,71	,196	1,57	,11	,284	1,92
,72	,229	1,69	,12	,303	2,01
,73	,262	1,83	,13	,321	2,09
,74	,295	1,97	,14	,338	2,18
,75	,327	2,12	,15	,354	2,26
,76	,359	2,29	,16	,370	2,34
,77	,391	2,46	,17	,385	2,43
,78	,422	2,64	,18	,400	2,51
,79	,453	2,84	,19	,413	2,59
,80	,484	3,05	,20	,426	2,67
,81	,515	3,27	,21	,438	2,74
,82	,546	3,52	,22	,450	2,82
,83	,576	3,77	,23	,461	2,89
,84	,606	4,04	,24	,471	2,96
,85	,636	4,33	,25	,479	3,01
,86	,666	4,63	,26	,486	3,06
,87	,695	4,95	,27	,494	3,12
,88	,724	5,30	,28	,500	3,16
,89	,753	5,66	,29	,505	3,20
,90	,782	6,05	,30	,509	3,23
,91	,810	6,46	,31	,512	3,25
,92	,838	6,89	,32	,514	3,27
,93	,865	7,33	,33	,514	3,27
,94	,892	7,80	,34	,514	3,27
,95	,918	8,28	,35	,513	3,26
,96	,944	8,79	,36	,511	3,24
,97	,970	9,33	,37	,508	3,22
,98	,996	9,91	,38	,502	3,18
,99	$\bar{1}$,021	1,05 10^{-1}	,39	,496	3,13

TABEL 1.

log x	*log Φ*	*Φ (x)*	*log x*	*log Φ*	*Φ (x)*
0,40	$\bar{1}$,489	3,08 10^{-1}	0,80	$\bar{3}$,690	4,90 10^{-3}
,41	,481	3,03	,81	,593	3,92
,42	,471	2,96	,82	,493	3,11
,43	,460	2,88	,83	,389	2,45
,44	,447	2,80	,84	,282	1,91
,45	,431	2,70	,85	,171	1,48
,46	,415	2,60	,86	,056	1,14
,47	,398	2,50	,87	$\bar{4}$,937	8,65 10^{-4}
,48	,380	2,40	,88	,814	6,52
,49	,360	2,29	,89	,688	4,88
,50	,338	2,18	,90	,557	3,61
,51	,314	2,06	,91	,422	2,64
,52	,289	1,95	,92	,282	1,91
,53	262	1,83	,93	,139	1,38
,54	,233	1,71	,94	$\bar{5}$,990	9,77 10^{-5}
,55	,202	1,59	,95	,837	6,87
,56	,169	1,48	,96	,680	4,79
,57	,135	1,36	,97	,517	3,29
,58	,098	1,25	,98	,350	2,24
,59	,060	1,15	,99	,178	1,51
,60	,019	1,04	1,00	,000	1,00
,61	$\bar{2}$,976	9,46 10^{-2}	,01	$\bar{6}$,817	6,56 10^{-6}
,62	,931	8,53	,02	,629	4,26
,63	,884	7,66	,03	,435	2,72
,64	,835	6,84	,04	,235	1,72
,65	,783	6,07	,05	,030	1,07
,66	,729	5,36	,06	$\bar{7}$,818	6,58 10^{-7}
,67	,673	4,71	,07	,601	3,99
,68	,614	4,11	,08	,377	2,38
,69	,552	3,56	,09	,147	1,40
,70	,488	3,08	,10	$\bar{8}$,911	8,15 10^{-8}
,71	,421	2,64	,11	,668	4,66
,72	,352	2,25	,12	,417	2,61
,73	,280	1,91	,13	,160	1,45
,74	,205	1,60	,14	$\bar{9}$,896	7,87 10^{-9}
,75	,127	1,34	,15	,625	4,22
,76	,046	1,11	,16	,346	2,22
,77	$\bar{3}$,962	9,16 10^{-3}	,17	,059	1,15
,78	,874	7,48	,18	$\overline{10}$,764	5,81 10^{-10}
,79	,784	6,08	,19	,462	2,90

TABEL 2.

$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$			
a	λ, T	a	λ, T	a	λ, T	a	λ, T	a	λ, T	$\log A \,.\, T^5$	$A \,.\, T^5$
0,00	7887	0,20	4977	0,40	3140	0,60	1981	0,80	1250	7,587 $-n$	3,86 10^{7-}
,01	7707	,21	4863	,41	3069	,61	1936	,81	1222	7,537	3,44
,02	7532	,22	4753	,42	2999	,62	1892	,82	1194	7,487	3,07
,03	7361	,23	4645	,43	2930	,63	1849	,83	1167	7,437	2,74
,04	7193	,24	4539	,44	2864	,64	1807	,84	1140	7,387	2,44
,05	7030	,25	4435	,45	2799	,65	1766	,85	1114	7,337	2,17
,06	6870	,26	4334	,46	2735	,66	1726	,86	1089	7,287	1,94
,07	6713	,27	4236	,47	2673	,67	1686	,87	1064	7,237	1,73
,08	6560	,28	4139	,48	2612	,68	1648	,88	1040	7,187	1,54
,09	6411	,29	4045	,49	2552	,69	1610	,89	1016	7,137	1,37
,10	6265	,30	3953	,50	2494	,70	1574	,90	992,9	7,087	1,22
,11	6123	,31	3863	,51	2437	,71	1538	,91	970,4	7,037	1,09
,12	5983	,32	3775	,52	2382	,72	1503	,92	948,3	6,987 $-n$	9,71 10^{6-}
,13	5847	,33	3689	,53	2328	,73	1469	,93	926,7	6,937	8,65
,14	5714	,34	3605	,54	2275	,74	1435	,94	905,6	6,887	7,71
,15	5581	,35	3523	,55	2223	,75	1403	,95	885,0	6,837	6,87
,16	5457	,36	3443	,56	2172	,76	1371	,96	864,8	6,787	6,12
,17	5333	,37	3365	,57	2123	,77	1339	,97	845,1	6,737	5,46
,18	5211	,38	3288	,58	2075	,78	1309	,98	825,9	6,687	4,86
,19	5093	,39	3213	,59	2027	,79	1279	,99	807,1	6,637	4,34